Varianta 38

Subiectul I

a) $(2+i)^2-(2-i)^2=8i$.

b) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$.

c) $S_{ABC}=15$.

d) Partea reală a numărului complex este $\frac{3}{10}$.

e) $x=0$ şi $x=\pi$.

f) M este mijlocul segmentului $(AB)\Rightarrow M(0,4)$.

Subiectul II

1.

a) $(X-1)(X^2+1)=X^3+X-X^2-1=f$.

b) $p=\frac{1}{3}$.

c) obținem rădăcinile $1, -i, i$.

d) $x_1+x_2=0, x_1x_2=1$.

e) $x=3$.

2.

a) $f'(x)=-2x, \forall x\in\mathbf{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$.

c) $x=0$ este punct de maxim local.

d) $f'(x)<0, \forall x>0$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $(0,\infty)$.

e) $\int_{-2}^{2}|f(x)|dx=\frac{32}{3}$.

Subiectul III

a) $(x-1)(y-1)+1=xy-x-y+2=x\circ y, \forall x,y\in\mathbf{R}$.

b) Din $x\in G, y\in G$ rezultă $x-1>0, y-1>0$ deci $(x-1)(y-1)>0$ atunci $(x-1)(y-1)+2>1$ adică $x\circ y>1$.

c) $(x\circ y)\circ z=xyz-xy-xz-yz+x+y+z=x\circ(y\circ z)$.

d) $x\circ e=x, \forall x\in(1,\infty) \Leftrightarrow x(e-1)-e+2=x, \forall x\in(1,\infty)$. Identificând coeficienții obținem $e=2\geq 1$ şi se verifică că $2\circ x=x, \forall x\in G$.

e) Din $3 \circ x = 2x - 1$ şi folosind punctul **c)** obținem $(3 \circ x) \circ 3 = 9 \Leftrightarrow (2x-1) \circ 3 = 9$. Folosind punctul **a)** avem $2(2x-2)+1=9$, de unde $x=3$.

f) Pentru $n=1$ avem $x=(x-1)^1+1$, de unde $x=x$ adevărat.

Presupunem adevărat pentru $n=k$: $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{k\,ori} = (x-1)^k + 1, k \in \mathbf{N}^*$.

Vom arăta că $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{(k+1)ori} = (x-1)^{k+1} + 1$.

Dar $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{(k+1)ori} = \underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{k\,ori} \circ x = \left[(x-1)^k + 1\right] \circ x \overset{a)}{=} (x-1)^k (x-1) + 1 = (x-1)^{k+1} + 1$.

În baza inducției matematice avem $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{n\,ori} = (x-1)^n + 1, \forall x \in G, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) $\underbrace{2 \circ 2 \circ \ldots \circ 2}_{2007\,ori} \overset{f)}{=} (2-1)^{2007} + 1 = 1 + 1 = 2$.

Subiectul IV

a) $f'(x) = \dfrac{2(x+1) - 2(x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{4}{(x+1)^2}$.

$g'(x) = f'(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x} = -\dfrac{(1-x)^2}{x(x+1)^2}, \forall x > 0$.

b) $f(1) = 0;\ g(1) = f(1) - \ln 1 = 0;\ g'(1) = 0$.

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2(x-1)}{x+1} = 2$.

d) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$. Deci $x = 0$ este asimptota verticală la graficul funcției g .

e) $\displaystyle\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left(2 - \frac{4}{x+1}\right)dx = 2e - 2 + 4\ln\frac{2}{e+1}$.

f) $g'(x) \le 0, \forall x \in [1, \infty)$. Deci g este descrescătoare pe intervalul $[1, \infty)$.

g) Din g descrescătoare pe intervalul $[1, \infty)$ şi $g(1) = 0$ rezultă că

$g(x) \le 0, \forall x \in [1, \infty)$, de unde $\dfrac{2(x-1)}{x+1} \le \ln x, \forall x \in [1, \infty)$.